Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Ecole polytechnique fédérale de Zurich
Politecnico federale di Zurigo
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Dr. Jakob Bernasconi

Informationsverarbeitung in neuronalen Netzwerken

Frühjahrssemester 2009

Übung 2

Ausgabe am 6. März 2009
Abgabe am 20. März 2009

Problemstellung

In einem Grossraumbüro arbeiten 10 Personen (i = 1, …, 10) mit den folgenden individuellen Leistungsfähigkeiten R_i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_i	4	6	4	8	6	8	5	6	7	6

Aus der "Zuneigungs/Abneigungs-Matrix" (V_{ij}) ist aber ersichtlich, das viele dieser Personen nicht sehr gut miteinander auskommen:

j \ i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		1	-4	-3	3	-4	2	0	1	0
2			-1	-4	1	-2	1	-1	-4	2
3				1	0	-1	2	-3	-3	-1
4					-1	-3	-3	-2	2	-1
5						--2	4	-3	-1	-4
6		V_{ii} =	0				-4	-1	-2	2
7		V_{ij} =	V_{ji}					-3	-4	-2
8									-3	-1
9										-1
10										

Dadurch wird die effektive Leistungsfähigkeit der Abteilung stark beeinträchtigt und beträgt nur noch

$$L_0 = \sum_{i=1}^{10} R_i + \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{10} V_{ij} = 60 - 50 = 10 .$$

Deshalb wurde beschlossen, das Grossraumbüro in 2 kleinere Büros umzuwandeln, und dem Abteilungsleiter stellt sich nun das Problem, die 10 Personen so auf zwei Büros zu verteilen, dass die Leistungsfähigkeit der Abteilung maximal wird:

$$L = \sum_{i=1}^{10} R_i\, x_i \;+\; \sum_{i=1}^{10} R_i\,(1-x_i) \;+\; \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{10} V_{ij}\, x_i\, x_j \;+\; \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{10} V_{ij}\,(1-x_i)(1-x_j) \;=\; \max ,$$

wobei $$x_i = \begin{cases} 1: & \text{Person i in Büro 1} \\ 0: & \text{Person i in Büro 2} \end{cases} .$$

Aufgabe 1

Lösen Sie diese Optimierungsaufgabe mit Hilfe eines Hopfield-Tank Netzwerks.

Hinweise zum Vorgehen:

(i) Die Leistungsfähigkeit L lässt sich wie folgt schreiben:

$$L = L_0 + \Delta L , \quad \Delta L = \sum_{i=1}^{10} T_i\, x_i \;+\; \tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{10} W_{ij}\, x_i\, x_j \quad .$$

Ein Hopfield-Tank Netzwerk mit den Gewichten W_{ij} und den Schwellen T_i relaxiert also gegen ein Minimum seiner Energiefunktion $E = -\Delta L$, d.h. gegen ein Maximum von ΔL.

(ii) Wählen Sie die Anfangswerte für die x_i zufällig zwischen 0 und 1.

(iii) Wählen Sie zufällig ein i im Bereich (1, 2, …., 10) und ändern Sie den entsprechenden x_i-Wert wie folgt:

$$x_i = f\Big(\sum_{j=1}^{10} W_{ij}\, x_j + T_i\Big) \quad , \quad f(x) = \frac{1}{1+e^{-\beta x}} \quad .$$

(iv) Wiederholen Sie Punkt (iii) solange, bis alle x_i-Werte gegen 0 oder 1 (oder eventuell gegen 0.5) konvergiert sind.

Führen Sie mehrere Versuche mit verschiedenen Werten für den Parameter β durch (z.B. β = 1, 2, …, 8).

Welche und wieviele (optimale und suboptimale) Aufteilungen findet Ihr Hopfield-Tank Netzwerk?

Auf welchen Wert lässt sich die Leistungsfähigkeit L durch die entsprechenden Aufteilungen verbessern?

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, wie weit sich die Leistungsfähigkeit L der Abteilung noch erhöhen lässt, wenn die zwei Büros noch einmal in je 2 Büros aufgeteilt werden.

Benutzen Sie dazu für jedes Büro wieder ein Hopfield-Tank Netzwerk (Vorgehen analog zu Aufgabe 1).

Aufgabe 3

Klären Sie ab, ob sich L noch weiter erhöhen lässt, wenn einzelne Büros nochmals aufgeteilt werden.

(Kann "von Hand" durchgeführt werden!)

Aufgabe 4

Vergleichen Sie die Zufriedenheiten Z_i der einzelnen Personen im Grossraumbüro mit den entsprechenden Werten bei der Aufteilung in kleinere Büros.

Hinweis:

$$Z_i = \sum_j V_{ij} ,$$

wobei sich die Summe über alle Kollegen j erstreckt, die im gleichen Büro arbeiten wie i.

<u>Anhang</u>: Programmierungshinweise (MATLAB)

Initialisierung:

```
beta = 5;                                   [Parameter β]
nrun = 50;                                  [Anzahl Versuche]
niter = 500;                                [Anzahl Iterationen pro Versuch]
R = [4;6;4;8;6;8;5;6;7;6];                  [Individuelle Leistungsfähigkeiten]
V = [ 0, 1,-4,-3, 3,-4, 2, 0, 1, 0; ...     [Zuneigungs/Abneigungs-Matrix]
      1 ,0,-1,-4, 1,-2, 1,-1,-4, 2; ...
     -4,-1, 0, 1, 0,-1, 2,-3,-3,-1; ...
     -3,-4, 1 ,0,-1,-3,-3,-2, 2,-1; ...
      3, 1, 0,-1, 0,-2, 4,-3,-1,-4; ...
     -4,-2,-1,-3,-2, 0,-4,-1,-2, 2; ...
      2 ,1 ,2,-3, 4,-4, 0,-3,-4,-2; ...
      0,-1,-3,-2,-3,-1,-3, 0,-3,-1; ...
      1,-4,-3, 2,-1,-2,-4,-3, 0,-1; ...
      0, 2,-1,-1,-4, 2,-2,-1,-1, 0];
Vs = sum(V,2);                              [Summe über Zeilen]
L0 = sum(R) + 0.5 * sum(Vs);                [Leistungsfähigkeit der Abteilung im Grossraumbüro]
T = ???;                                    [Schwellenwerte T_i als Funktion der V_ij]
W = ???;                                    [Gewichte W_ij als Funktion der V_ij]
```

Hopfield-Tank Iteration (zufällige Reihenfolge):

```
ww = zeros(10,1);
for n=1:nrun
      xs = rand(10,1);                      [Zufällige Wahl der Anfangswerte für die x_i]
      x = xs;
         for k=1:niter
            is = rand(1,1);
            is = floor(10*is) + 1;
            ww = W * xs;
            x(is) = T(is) + ww(is);
            x(is) = 1/(1+exp(-beta * x(is)));
            xs = x;
         end
      wx = W * xs;                          [Berechnung von L]
      DL = xs' * T + 0.5 * wx' * xs;
      L = L0 + DL;
      …………..                               [x-Werte (= xs') und L für Versuch n ausdrucken]
end
```