Dr. Jakob Bernasconi

Informationsverarbeitung in neuronalen Netzwerken

Frühjahrssemester 2009

Musterlösung Übung 2

Aufgabe 1

Durch Ausmultiplizieren kann man die Leistungsfähigkeit

$$L = \sum_{i=1}^{10} R_i x_i + \sum_{i=1}^{10} R_i (1-x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{10} V_{ij} x_i x_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{10} V_{ij} (1-x_i)(1-x_j)$$

aufspalten in einen von den x_i unabhängigen Teil

$$L_0 = \sum_{i=1}^{10} R_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{10} V_{ij}$$

und einen von den x_i abhängigen Teil

$$\Delta L = - \sum_{i=1}^{10} x_i \sum_{j=1}^{10} V_{ij} + \sum_{i,j=1}^{10} V_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{10} T_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{10} W_{ij} x_i x_j .$$

$$[\text{beachte dass } V_{ij} = V_{ji} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j=1}^n a_i b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n b_{ij}]$$

Dann ist $L = L_0 + \Delta L$, und die Schwellen T_i und Gewichte W_{ij} des Hopfield-Tank-Netzwerks, das die Optimierungsaufgabe löst, sind also gegeben durch

$$T_i = - \sum_{j=1}^{10} V_{ij} \quad \text{und} \quad W_{ij} = 2 V_{ij} .$$

Mit diesem Hopfield-Tank-Netzwerk ($\beta = 5$) wurden folgende Lösungen gefunden:

	Büro 1	Büro 2	L
A	1,2,3,5,7	4,6,8,9,10	59
B	1,2,5,7,8	3,4,6,9,10	58
C	1,3,4,5,7,9	2,6,8,10	55

Die Leistungsfähigkeit der Abteilung lässt sich also durch den Einbau einer Trennwand von $L = 10$ auf $L = 59$ steigern.

[Bei kleineren Werten von β sind die gefundenen x_i -Werte weniger nahe bei Null bzw. Eins, aber es wurden keine weiteren Lösungen gefunden.]

Aufgabe 2

Eine nochmalige Aufteilung in je zwei Büros ergibt die folgenden Lösungen (Vorgehen für jedes Büro analog zu Aufgabe 1):

	Büro 1	Büro 2	Büro 3	Büro 4	L
A1	1,2,5,7	3	4,9	6,8,10	74
B1	1,2,5,7	8	4,9	3,6,10	74
B1'	1,2,5,7	8	3,4,9	6,10	74
C1	1,3,5,7	4,9	8	2,6,10	71
C1'	1,5,7	3,4,9	8	2,6,10	71

Durch zwei weitere Trennwände lässt sich die Leistungsfähigkeit also nochmals beträchtlich steigern, nämlich von $L = 59$ auf $L = 74$.

Aufgabe 3

Ob sich die Leistungsfähigkeit durch nochmalige Aufteilung einzelner Büros noch weiter steigern lässt, kann leicht "von Hand" untersucht werden.

Für die Aufteilung A1 sehen die Zuneigungs-/Abneigungs-Matrizen der vier Büros z.B. wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad [0] \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass nur die Isolierung von Person 8, die gegen die Personen 6 und 10 eine Abneigung hat, noch eine weitere Leistungssteigerung bringt.

Mit ähnlichen Überlegungen erhält man schliesslich die folgenden optimalen Aufteilungen:

	Büro 1	Büro 2	Büro 3	Büro 4	Büro 5	L
A2	1,2,5,7	3	4,9	8	6,10	76
B2	1,2,5,7	8	4,9	3	6,10	76
C2	1,5,7	3	4,9	8	2,6,10	73

Eine weitere Trennwand bringt bei allen Lösungen also nochmals eine Leistungssteigerung von 2 Punkten, nämlich von $L = 74$ auf $L = 76$ bzw. von $L = 71$ auf $L = 73$.

Bemerkungen:

- Die Aufteilung B2 ist äquivalent zu A2.
- Bei der Aufteilung C2 bleibt die Leistungsfähigkeit unverändert ($L = 73$), wenn die Person 2 in ein Einzelbüro verlegt wird, aber es wird eine Trennwand mehr benötigt. Besser wäre ein Transfer von Person 2 ins Büro 1, dann würde C2 äquivalent zu A2 und B2.

Aufgabe 4

Für die Zufriedenheiten Z_i der einzelnen Personen,

$$Z_i = \sum_{j \text{ in Büro von } i} V_{ij} ,$$

ergeben sich bei den verschiedenen Aufteilungen folgende Werte,

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
G	-4	-7	-10	-14	-3	-17	-7	-17	-15	-6
A	2	2	-3	-4	8	-4	9	-7	-4	-1
B	6	2	-4	-1	5	-4	4	-7	-4	-1
C	-1	-1	-4	-4	5	-1	1	-3	-5	3
A1	6	3	0	2	8	1	7	-2	2	1
B1	6	3	-2	2	8	1	7	0	2	1
C1	1	0	-2	2	7	0	8	0	2	4
A2=B2	6	3	0	2	8	2	7	0	2	2
C2	5	0	0	2	7	0	6	0	2	4

oder zusammengefasst,

	Z_min	<Z>	Z_max
G	-17	-10	-3
A	-7	-0.2	9
B	-7	-0.4	6
C	-5	-1.0	5
A1	-2	2.8	8
B1	-2	2.8	8
C1	-2	2.2	8
A2=B2	0	3.2	8
C2	0	2.6	7

Bemerkungen:

- Bei den Aufteilungen in zwei Büros (A, B und C) ist die mittlere Zufriedenheit <Z> zwar immer noch negativ, aber die individuellen Zufriedenheiten sind markant besser als im Grossraumbüro, wo alle Personen sehr unzufrieden sind.
- Bei den Aufteilungen A1, B1 und C1 ist die mittlere Zufriedenheit <Z> bereits positiv, aber es gibt immer noch eine Person, die nicht zufrieden ist.
- Erst bei den Aufteilungen A2=B2 und C2 hat keine Person mehr eine negative Zufriedenheit. [In Einzelbüros ist die Zufriedenheit immer neutral ($Z_i = 0$) !]